

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТЕПЛА В СИСТЕМЕ ДВУХ ТЕЛ

**И.В. Рогов, Н.Ф. Майникова,
Е.П. Полунин, Н.Ю. Тужилина**

*ГОУ ВПО «Тамбовский государственный технический
университет», г. Тамбов*

Ключевые слова и фразы: математическая модель; система двух тел; теплопроводность; теплофизические свойства.

Аннотация: Представлена математическая модель распространения тепла в системе двух тел применительно к измерительной ячейке информационно-измерительной системы, предназначенной для определения теплофизических свойств теплоизоляционных материалов.

Сложность и большой объем экспериментальных исследований по определению теплофизических свойств (ТФС) как традиционных материалов, так и вновь синтезированных, требуют создания новых эффективных методов и средств контроля. Модульная структура современных программно-технических средств в сочетании с принципами открытых вычислительных систем позволила создать информационно-измерительную систему (ИИС) для определения теплофизических свойств теплоизоляционных материалов. По сравнению с известными бикалориметрами [1, 2] данная ИИС имеет ряд преимуществ. А именно:

- система позволяет определять не только значение теплопроводности исследуемых материалов, но и значение температуропроводности;
- повышение точности определения значений теплопроводности и температуропроводности достигается за счет автоматической обработки экспериментальных данных по разработанному алгоритму согласно решениям соответствующих краевых задач теплопроводности для стадий нагрева и остывания измерительной ячейки (ИЯ).

Математическая модель распространения тепла в системе двух тел применительно к поставленной задаче имеет следующий вид.

Тепловая схема представлена на рис. 1. Две пластины 1 и 2 (1 – сердечник ИЯ, 2 – испытуемый материал) с известными теплофизическими свойствами находятся в идеальном тепловом контакте. Толщина пластины

Рогов И.В. – кандидат технических наук, докторант кафедры «Гидравлика и теплотехника», e-mail: teplotehnika@nnn.tstu.ru; Майникова Н.Ф. – доктор технических наук, профессор кафедры «Теория машин, механизмов и детали машин»; Полунин Е.П. – магистрант кафедры «Гидравлика и теплотехника»; Тужилина Н.Ю. – соискатель, ассистент кафедры «Гидравлика и теплотехника», ТамбГТУ, г. Тамбов.

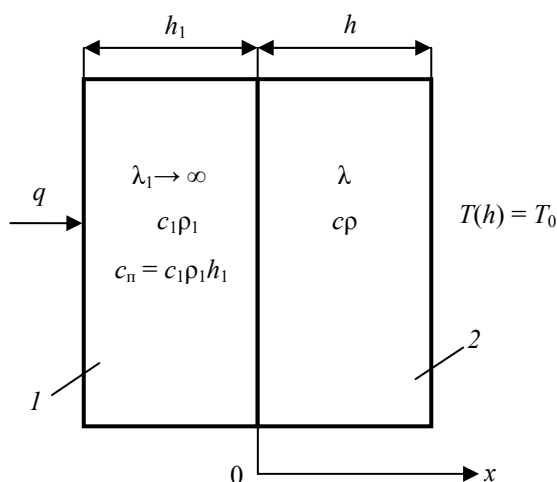


Рис. 1. Тепловая схема

l равна h_1 , а толщина пластины 2 – h . Пластина 1 изготовлена из латуни, обладающей высокой теплопроводностью λ_1 .

В начальный момент времени значения температуры во всех точках обеих пластин одинаковы и равны T_0 . На наружную поверхность пластины 1 действует постоянный тепловой поток q . Наружная поверхность пластины 2 находится при постоянной температуре $T_0 = \text{const}$.

Требуется определить распределение температуры в пластине 2 в любой момент времени.

Дифференциальное уравнение теплопроводности для одномерного потока тепла имеет вид

$$\frac{\partial T(x, \tau)}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 T(x, \tau)}{\partial x^2}, \quad \tau > 0, \quad x > 0, \quad (1)$$

где τ – время, с; x – координата, м.

Начальное условие

$$T(x, 0) = T_0. \quad (2)$$

Граничное условие

$$-\lambda \frac{\partial T(0, \tau)}{\partial x} = q - c_{\text{п}} \frac{\partial T(0, \tau)}{\partial \tau}, \quad (3)$$

где $c_{\text{п}}$ – теплоемкость, отнесенная к единице площади пластины 1, Дж/(м²·К)

$$c_{\text{п}} = c_1 \rho_1 h_1, \quad (4)$$

где c_1 – удельная теплоемкость пластины 1, Дж/(кг·К); ρ_1 – плотность материала пластины 1, кг/м³.

Распределение температуры на поверхности пластины 2

$$T(h, \tau) = T_0. \quad (5)$$

Выражения (2), (3) и (5) в безразмерной форме:

$$\frac{\partial \Theta(\chi, Fo)}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \Theta(\chi, Fo)}{\partial \chi^2}, \quad Fo > 0, \quad \chi > 0, \quad (6)$$

$$\Theta(\chi, 0) = 0, \quad (7)$$

$$-\frac{\partial \Theta(0, Fo)}{\partial \chi} = 1 - \sigma \frac{\partial \Theta(0, Fo)}{\partial Fo}, \quad (8)$$

$$\Theta(1, Fo) = 0, \quad (9)$$

где $Fo = a\tau/h^2$, $\chi = x/h$, $\Theta = \lambda(T - T_0)/qh$ – время, координата, температура в безразмерном виде; $\sigma = c_{\text{п}}a/\lambda h = c_{\text{п}}/c\rho h$ – относительная теплоемкость пластины I .

Применим к системе уравнений (6) – (9) преобразование Лапласа:

$$p\Theta_L(\chi, p) = \frac{\partial^2 \Theta_L(\chi, p)}{\partial \chi^2}; \quad (10)$$

$$-\frac{\partial \Theta_L(0, p)}{\partial \chi} = \frac{1}{p} - p\sigma\Theta_L(0, p); \quad (11)$$

$$\Theta_L(1, p) = 0. \quad (12)$$

Решение дифференциального уравнения (10) можно представить в виде

$$\Theta_L(\chi, p) = A \operatorname{ch}(\sqrt{p}\chi) + B \operatorname{sh}(\sqrt{p}\chi). \quad (13)$$

Постоянные A и B найдем из выражений (11) и (12), используя решение дифференциального уравнения (13):

$$A \operatorname{ch}(\sqrt{p}) + B \operatorname{sh}(\sqrt{p}) = 0; \quad (14)$$

$$-B\sqrt{p} = \frac{1}{p} - p\sigma A. \quad (15)$$

Решая выражения (14) и (15) относительно постоянных A и B , получим:

$$A = \frac{\operatorname{sh}(\sqrt{p})}{p\sqrt{p}(\operatorname{ch}(\sqrt{p}) + \sqrt{p}\sigma \operatorname{sh}(\sqrt{p}))}; \quad (16)$$

$$B = -\frac{\operatorname{ch}(\sqrt{p})}{p\sqrt{p}(\operatorname{ch}(\sqrt{p}) + \sqrt{p}\sigma \operatorname{sh}(\sqrt{p}))}. \quad (17)$$

Решение в виде преобразования Лапласа имеет вид

$$\Theta_L(\chi, p) = \frac{\text{sh}(\sqrt{p})\text{ch}(\sqrt{p}\chi) - \text{ch}(\sqrt{p})\text{sh}(\sqrt{p}\chi)}{p\sqrt{p}(\text{ch}(\sqrt{p}) + \sqrt{p}\sigma\text{sh}(\sqrt{p}))}. \quad (18)$$

Решение (18) есть отношение двух обобщенных полиномов $\frac{\Phi(p)}{\psi(p)}$, где

$$\Phi(p) = \frac{\text{sh}(\sqrt{p})\text{ch}(\sqrt{p}\chi) - \text{ch}(\sqrt{p})\text{sh}(\sqrt{p}\chi)}{\sqrt{p}} = 1 - \chi + \left(-\frac{1}{6}\chi^3 - \frac{1}{2}\chi + \frac{1}{2}\chi^2 + \frac{1}{6}\right)p + \dots; \quad (19)$$

$$\psi(p) = p(\text{ch}(\sqrt{p}) + \sqrt{p}\sigma\text{sh}(\sqrt{p})) = p\left(1 + \left(\frac{1}{2} + \sigma\right)p + \left(\frac{1}{24} + \frac{\sigma}{6}\right)p^2 + \dots\right). \quad (20)$$

Найдем корни p_n обобщенного полинома $\psi(p)$, для этого приравняем его к нулю

$$p(\text{ch}(\sqrt{p}) + \sqrt{p}\sigma\text{sh}(\sqrt{p})) = 0. \quad (21)$$

Отсюда найдем:

- 1) $p_0 = 0$ (однократный корень);
- 2) бесчисленное множество корней, удовлетворяющих уравнению

$$\text{ch}(\sqrt{p}) + \sqrt{p}\sigma\text{sh}(\sqrt{p}) = 0. \quad (22)$$

Воспользуемся теоремой разложения:

$$L^{-1}\left[\frac{\Phi(p)}{\psi(p)}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Phi(p_n)}{\frac{d\psi(p_n)}{dp}} e^{p_n \text{Fo}}; \quad (23)$$

$$\frac{d\psi(p)}{dp} = (\text{ch}(\sqrt{p}) + \sqrt{p}\sigma\text{sh}(\sqrt{p})) + p \frac{1}{2} \left(\frac{\text{sh}(\sqrt{p})}{\sqrt{p}} + \frac{\sigma\text{sh}(\sqrt{p})}{\sqrt{p}} + \sigma\text{ch}(\sqrt{p}) \right). \quad (24)$$

Для нулевого корня $p_0 = 0$ имеем

$$\frac{\Phi(p_0)}{\frac{d\psi(p_0)}{dp}} e^{p_0 \text{Fo}} = 1 - \chi. \quad (25)$$

Для остальных корней

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi(p_n)}{\frac{d\psi(p_n)}{dp}} e^{p_n \text{Fo}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sh}(\sqrt{p_n})\text{ch}(\sqrt{p_n}\chi) - \text{ch}(\sqrt{p_n})\text{sh}(\sqrt{p_n}\chi)}{p_n^{0,5} p_n \frac{1}{2} \left(\frac{\text{sh}(\sqrt{p_n})}{\sqrt{p_n}} + \frac{\sigma\text{sh}(\sqrt{p_n})}{\sqrt{p_n}} + \sigma\text{ch}(\sqrt{p_n}) \right)} e^{p_n \text{Fo}}. \quad (26)$$

Введем обозначения

$$p = -\mu^2 \text{ и } \sqrt{p} = i\mu. \quad (27)$$

С учетом:

$$\operatorname{sh}(i\mu) = i \sin \mu; \quad (28)$$

$$\operatorname{ch}(i\mu) = \cos \mu, \quad (29)$$

получим характеристическое уравнение

$$\cos \mu - \mu \sigma \sin \mu = 0. \quad (30)$$

После преобразования:

$$\mu \sigma \operatorname{tg} \mu = 1 \text{ или } \operatorname{ctg} \mu = \mu \sigma. \quad (31)$$

Закон распределения температуры в пластине 2 в любой момент времени в любой точке в безразмерном виде

$$\Theta(\chi, Fo) = 1 - \chi - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\mu_n) \cos(\mu_n \chi) - \cos(\mu_n) \sin(\mu_n \chi)}{\mu_n^2 (\sin(\mu_n) + \sigma \sin(\mu_n) + \mu_n \sigma \cos(\mu_n))} \exp(-\mu_n^2 Fo), \quad (32)$$

где μ_n – корни характеристического уравнения (31).

С учетом характеристического уравнения (31) выражение (32) преобразуется к виду

$$\Theta(\chi, Fo) = 1 - \chi - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\mu_n \chi) - \mu \sigma \sin(\mu_n \chi)}{\mu_n^2 (1 + \sigma + \mu_n^2 \sigma^2)} \exp(-\mu_n^2 Fo). \quad (33)$$

Выражение (33) для точки пластины 2 с координатой $\chi = 0$

$$\Theta(0, Fo) = 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \mu_n}{\mu_n^2 (\sin \mu_n + \sigma \sin \mu_n + \mu_n \sigma \cos \mu_n)} \exp(-\mu_n^2 Fo). \quad (34)$$

Изменение температуры пластины 2 в зависимости от времени для точки с координатой $\chi = 0$ определяется формулой

$$\Theta(0, Fo) = 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n^2 (1 + \sigma + \mu_n^2 \sigma^2)} \exp(-\mu_n^2 Fo). \quad (35)$$

При больших значениях Fo выражение (35) имеет вид

$$\Theta(0, Fo) = 1 - 2 \frac{1}{\mu_1^2 (1 + \sigma + \mu_1^2 \sigma^2)} \exp(-\mu_1^2 Fo), \quad (36)$$

где μ_1 – первый корень характеристического уравнения (31).

Разложив уравнение (31) в ряд Маклорена [3] и ограничившись только первым членом ряда, получим выражение для μ_1

$$\operatorname{ctg} \mu_1 = \frac{1}{z} - \frac{1}{3} \mu_1 - \frac{1}{45} \mu_1^3 - \frac{2}{945} \mu_1^5 - \dots, \quad 0 < \mu_1 < \pi, \quad (37)$$

$$\mu_1 \approx \frac{3}{\sqrt{3+9\sigma}}. \quad (38)$$

При больших значениях Fo выражение (36) с учетом (38) имеет вид

$$\Theta(0, Fo) = 1 - 2 \frac{(1+3\sigma)^2}{3(1+4\sigma+6\sigma^2)} \exp\left(-\frac{3}{1+3\sigma} Fo\right). \quad (39)$$

Подставив выражения для Fo и Θ в формулу (39), получим решение задачи для стадии нагрева при больших значениях Fo

$$T(0, \tau) = T_0 + \frac{qh}{\lambda} \left[1 - 2 \frac{(1+3\sigma)^2}{3(1+4\sigma+6\sigma^2)} \exp\left(-\frac{3a\tau}{(1+3\sigma)h^2}\right) \right]. \quad (40)$$

Таким образом получена математическая модель распределения тепла в системе двух тел применительно к ИЯ ИИС, предназначенной для определения ТФС материалов.

Список литературы

1. Теплофизические измерения и приборы / Е.С. Платунов, [и др.] ; под общ. ред. Е.С. Платунова. – Л. : Машиностроение, 1986. – 144 с.
2. Кондратьев, Г.М. Регулярный тепловой режим / Г.М. Кондратьев. – М. : Гостехиздат, 1954. – 408 с.
3. Смирнов, В.И. Курс высшей математики / В.И. Смирнов. – М. : Наука, 1974. – Т. 1. – 480 с.

Mathematical Model of Heat Distribution in Two Bodies System

I.V. Rogov, N.F. Mainikova, E.P. Polunin, N.U. Tuzhilina

Tambov State Technical University, Tambov

Key words and phrases: mathematical model; system of two bodies; heat conductivity; thermo-physical properties.

Abstract: The paper designs the mathematical model of heat distribution in the system of two bodies with reference to the measuring cell of the information-measuring system intended for identification of thermo-physical properties of heat-insulating materials.

© И.В. Рогов, Н.Ф. Майникова, Е.П. Полунин,
Н.Ю. Тужилина, 2010